250 Transformation de Fourier, Applications.

I] Transformation de Fourier

1] Transformée dans $L^1(\mathbb{R})$

III.2

Définition 1 : Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction : $\mathcal{F}(f) : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{C}\\ y\mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi xy}dx\end{array}$. On note $\hat{f}$.

Remarque 2 : On utilisera aussi des variantes de cette définition par exemple $\mathcal{F}(f)(y)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}dy$.

Exemple 3 : $\widehat{\mathbb{1}_{[-a;a]}}(y) = \begin{cases} 2a & \text{si } y=0 \\ \frac{\sin(2\pi a y)}{\pi y} & \text{sinon}\end{cases}$

Proposition 4 : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \begin{array}{l} L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f\mapsto \mathcal{F}(f)\end{array}$ est une application linéaire.

[Li]

Lemme 5 : Soit $p\in[1;+\infty[$, $f\in L^p(\mathbb{R})$ et $\tau_f : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to L^p(\mathbb{R}) \\ x\mapsto [t\mapsto f(t-x)]\end{array}$

Alors : τ_f est uniformément continue

Théorème 6 : Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$.

Alors : $\mathcal{F}(f)\in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \{f\in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \lim_{|x|\to+\infty} f(x)=0\}$

Remarque 7 : C'est l'analogue du lemme de Riemann-Lebesgue pour les séries de Fourier.

Théorème 8 : Soit $f,g\in L^1(\mathbb{R})$.

Alors : $\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$

Remarque 9 : La convolution régularise les fonctions mais n'est pas facile à calculer. Ce théorème simplifie cette vision.

Corollaire 10 : L'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour $*$.

Remarque 11 : L'unité pour la convolution est δ le Dirac en 0 mais n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

Corollaire 12 : L'application linéaire $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R})\to\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est continue et de norme 1

2] Théorème d'inversion et conséquences

III.2.2

Théorème 13 : (d'inversion) Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f)\in L^1(\mathbb{R})$.

Alors : $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f\circ(-id)$ ou $f(x)=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(f)(y)e^{2i\pi xy}dy$ p.p.

On note $(\overline{\mathcal{F}}(u))(y)=\int_{\mathbb{R}} u(x)e^{2i\pi xy}dx$, d'où : $f=\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))$

[Li]

Exemple 14 : Pour $f=\mathbb{1}_{[-a;a]}*\mathbb{1}_{[-a;a]}$, on peut montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2dt=\pi$

Théorème 15 : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R})\to\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.

Remarque 16 : On peut montrer par le théorème des isomorphismes de Banach que $\mathcal{F}$ n'est pas surjective. Cependant, on a le résultat suivant :

Théorème 17 : $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

3] Application aux polynômes orthogonaux

Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle.

III.1.5

Définition 18 : On appelle fonction poids sur I toute fonction $\rho : I\to\mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}}|x|^n\rho(x)dx<+\infty$. On note $L^2(I;\rho):=\{f : I\to\mathbb{C} \mid \int_I |f(x)|^2\rho(x)dx<+\infty\}$ muni du produit scalaire $\langle f;g\rangle_\rho := \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$.

[OA]

Proposition 19 : $(L^2(I,\rho);\langle;\rangle_\rho)$ est un espace de Hilbert

Théorème 20 : Il existe une unique famille (P_n) de polynômes 2 à 2 orthogonaux tels que $\deg(P_n)=n$. On appelle cette famille de polynômes les polynômes orthogonaux associés à ρ.

Exemples 21 : (1) Pour $I=\mathbb{R}$, $\rho(x)=e^{-x^2}$, on appelle ces polynômes les polynômes de Hermite :

$P_0=1$; $P_1=X$; $P_2=X^2-\frac{1}{2}$; … ; $P_n=\frac{(-1)^n}{2^n}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$

III.1.5 [OA]

(2) Pour $I=[-1;1]$, $\rho(x)=1$, on appelle les polynômes de Legendre :
$P_0=1$; $P_1=X$; $P_2=X^2-\frac{1}{3}$; … ; $P_n=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$

Théorème 22 : Soit ρ fonction poids sur I telle que : $\exists a>0 \mid \int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx<+\infty$.
Alors : la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I;\rho)$.

Contrexemple 23 : L'hypothèse sur ρ est vitale.
Pour $I=\mathbb{R}_+$, $w(x)=x^{-\ln(x)}$, la famille des polynômes orthogonaux associés à w ne forme point de base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_+;w)$.

II] Prolongement de la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$

III.2.3 [Li]

1] Résultats préliminaires de densité

Définition 24 : On note $A(\mathbb{R}):=\{f\in L^1(\mathbb{R}) \mid \mathcal{F}(f)\in L^1(\mathbb{R})\}$.

Exemple 25 : $x\mapsto e^{-2\pi|x|}\in A(\mathbb{R})$

Proposition 26 : Soit $f\in A(\mathbb{R})$.
Alors : $\mathcal{F}(f)\in A(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ et $f\in L^2(\mathbb{R})$

Lemme 27 : Soit $f,g\in L^1(\mathbb{R})$.
Alors : $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(g)(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(f)(y)g(y)\,dy$

Proposition 28 : Soit $f\in A(\mathbb{R})$.
Alors : $\|f\|_2=\|\mathcal{F}(f)\|_2$

Théorème 29 : $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

2] Théorème de Plancherel et conséquences

III.2.3 [Li]

Théorème 30 : (de Plancherel) La transformation de Fourier $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})\to\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Remarque 31 : Comme $\mathcal{F}:L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ fait intervenir de la densité, on ne peut pas toujours calculer la transformée de Fourier d'une fonction $f\in L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 32 : Soit $f\in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_A(x)=\int_{-A}^{A}f(x)e^{-2i\pi xy}\,dx$.
Alors : $\lim_{A\to+\infty}\|\varphi_A-\mathcal{F}(f)\|_2=0$

Proposition 33 : Soit $f\in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi_A(y)=\int_{-A}^{A}\mathcal{F}(f)(y)e^{2\pi iyx}\,dy$.
Alors : $\lim_{A\to+\infty}\|\psi_A-f\|_2=0$

Théorème 34 : Soit $f\in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f)\in L^1(\mathbb{R})$.
Alors : $\forall$ p.t. $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(f))(y)e^{2i\pi xy}\,dy$

Exemple 35 : Pour $f(x)=\frac{\sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}$, on a :
$\mathcal{F}(f)(y)=\frac{1}{2\lambda}\mathbb{1}_{[-\lambda;\lambda]}(y)$.

III] Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz

X.5.2 [Li]

1] Espace de Schwartz

Définition 36 : On appelle espace de Schwartz :
$S(\mathbb{R}):=\{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid \forall n,k\in\mathbb{N},\ \sup_{\mathbb{R}}|x^n f^{(k)}(x)|<+\infty\}$

Remarque 37 : $\mathcal{D}(\mathbb{R}):=\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})\subseteq S(\mathbb{R})$.

Exemple 38 : Pour $a>0$, $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{-ax^2}\end{array}$ est dans $S(\mathbb{R})$ pas $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Définition 39 : La transformée de Fourier sur $S(\mathbb{R})$ est :
$$\mathcal{F}:\begin{array}{l}S(\mathbb{R})\to S(\mathbb{R})\\ f\mapsto\left[\xi\mapsto\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-ix\xi}\,dx\right]\end{array}$$

[X.S.2] [Li]

Proposition 40 : L'espace de Schwartz vérifie :

(1) $S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ et $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f) \in S(\mathbb{R})$.

(2) $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ est surjective

(3) $\forall f, g \in S(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$

(4) $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}^{(k)}(y) = \widehat{f_k}(y)$ avec $f_k(x) = (-2i\pi x)^k f(x)$

et $\widehat{f^{(n)}}(y) = (2i\pi y)^n \widehat{f}(y)$

2] Application au théorème de Plancherel

[Isen]

Proposition 41 : $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$

Théorème 42 : (de Riesz-Fischer) $\forall p \in [1; +\infty[$, $L^p(\mathbb{R})$ est complet.

Théorème 43 : (de prolongement des applications uniformément continues) Soit E, F espaces métriques, F complet, $A \subseteq E$ dense dans E, $f : A \to F$ uniformément continue.

Alors : $\exists ! \, g : E \to F$ uniformément continue prolongeant f

Théorème 44 : (de Plancherel) Soit $\mathcal{P} : \begin{array}{l} S(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) \end{array}$

Alors : il existe un unique prolongement isomorphique, isométrique de $\mathcal{P}$ à $L^2(\mathbb{R})$.

3] Extension aux distributions tempérées

[X.S.3] [Li]

Définition 45 : On dit qu'une forme linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est une distribution tempérée s'il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tq :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad |\langle T ; \varphi \rangle| \leq C \sup_{k, n \in [\![0, m]\!]} \{ \| x^n f^{(k)}(x) \|_\infty \}$$

On note $S'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées.

Exemple 46 : $\ln|x|$ et $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ définissent des distributions tempérées.

$\sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k^{(k)}$ et $\exp(x)$ définissent pas des distributions tempérées.

[X.S.3] [Li]

Définition 47 : Pour toute distribution tempérée T, on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(T)$ comme :

$$\forall f \in S(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{F}(T) ; f \rangle = \langle T ; \mathcal{F}(f) \rangle$$

Exemple 48 : $\mathcal{F}(\delta) = \mathbb{1}$ et si $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$\mathcal{F}(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2i\pi)^k} a_k \delta_0^{(k)}$$

Proposition 49 : Soit $T \in S'(\mathbb{R})$.

Alors : $\mathcal{F}(T') = (2i\pi x) \mathcal{F}(T)$

Références:

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle - Li
[OA] Objectif Agrégation - Beck
[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann